Домашна работа 1 по Алгебра 1. 3 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

3 Въпрос В пространството $\mathbb{Q}^5$ на наредените петорки рационални числа са дадени векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 3, 4),\ a_2 = (3, 1, -2, 1, -1),\ a_3 = (2, -3, 1, -1, 1).$$

Да се докаже, че a_1, a_2, a_3 е линейно независима система вектори и да се допълни тази система до базис на $\mathbb{Q}^5$.

Решение: Дадените вектори образуват следната система от вектори:

$$\left|\begin{array}{rrrrrcc} x_1 & -x_2 & 2x_3 & 3x_4 & 4x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & x_2 & -2x_3 & x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & x_3 & -x_4 & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Което се свежда до следната матрица от коефициенти:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -3 и го събираме с втори ред.
Умножаваме първи ред с -2 и го събираме с трети ред.
Разменяме втори ред с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 4 & -8 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред с 4 и го събираме с трети ред.
Умножаваме втори ред с -1 и го събираме с първи ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 10 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -20 & -36 & -41 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с 12, втори ред с -20 и трети ред с -3.

$$\sim \begin{pmatrix} 12 & 0 & 60 & 120 & 132 \\ 0 & 20 & 60 & 140 & 140 \\ 0 & 0 & 60 & 108 & 123 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред с -1 и го събираме с първи и втори ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 12 & 9 \\ 0 & 20 & 0 & 32 & 17 \\ 0 & 0 & 60 & 108 & 123 \end{pmatrix}$$

Делим първи ред с 12, втори ред с 20 и трети ред с 60.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{17}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} & \frac{41}{20} \end{pmatrix}$$

Матрицата е в Гаус-Жорданов вид.

$\Longrightarrow$ a_1, a_2, a_3 са линейно независими вектори

Избираме поизволен $a_4 \in \mathbb{Q}^5 \setminus l(a_1, a_2, a_3)$ и произволен $a_5 \in \mathbb{Q}^5 \setminus l(a_1, a_2, a_3, a_4)$:

$$a_4 = (0, 0, 0, 1, 0)\ ,\quad a_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

От Лемата за линейна независимост, следва че a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 са линейно независими.
От $\dim\left(\mathbb{Q}^5\right) = 5$, знаем че всеки базис на $\mathbb{Q}^5$ е съставен от пет линейно независими вектора.

$\Longrightarrow$ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ е базис на $\mathbb{Q}^5$